Ejercicios de Análisis Funcional

Relación 4 - Espacios normados de dimensión finita

1. Prueba que una sucesión acotada y no convergente en un espacio normado de dimensión finita tiene al menos dos parciales que convergen a límites distintos.

2. Prueba que para cada $N\in\mathbb{N}$ existe un número $C_N > 0$ tal que para todo polinomio de grado menor o igual que N se verifica que
$$\sum_{k=0}^{N} |p(k)| \leqslant C_N \int_0^N |p(t)|\,\mathrm{d}t$$

3. Prueba que una sucesión $\{P_n\}$ de funciones polinómicas, todas ellas de grado menor o igual que un cierto $N\in\mathbb{N}$, converge uniformemente (es decir, con la norma $\|.\|_\infty$) en un intervalo $[a,b]$ si, y sólo si, existen $N+1$ números reales distintos del intervalo $[a,b]$, $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_N$, tales que las $N+1$ sucesiones $\{P_n(\beta_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ $(k=0,1,\ldots,N)$ convergen.

4. Sea X un espacio normado y M un subespacio cerrado de X. Prueba que X es completo si, y sólo si, M y X/M son completos.

   Sugerencia. Utiliza la caracterización de la complitud por series.

5. Sea X un espacio normado y $f\in X^*$. Prueba que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

   a) f alcanza su norma.

   b) Para todo $x\in X$ hay algún $y\in\ker(f)$ tal que $\|x-y\| = \|x+\ker(f)\|$.

6. Considera el espacio vectorial $X = \{f\in C[0,1] : f(0) = 0\}$ con la norma uniforme. Prueba que
$$M = \left\{ f\in X : \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$
   es un subespacio cerrado propio de X y que no existe $f\in X$ con $\|f\| = 1$ y $\operatorname{dist}(f,M) = 1$.

7. Sean N un subespacio finito dimensional y M un subespacio cerrado de un espacio normado X. Prueba que $M+N$ es cerrado.

   Sugerencia. Usa la aplicación cociente de X sobre X/M.

8. En el espacio normado $(c_{00}, \|\cdot\|_1)$ se consideran los subespacios
$$M = \{x\in c_{00} : x(2n) = nx(2n-1)\ \ \forall n\in\mathbb{N}\}, \quad N = \{x\in c_{00} : x(2n-1) = 0\ \ \forall n\in\mathbb{N}\}$$
   Prueba que M y N son subespacios cerrados de c_{00}, que $c_{00} = M\oplus N$ y las proyecciones sobre M y N son discontinuas.

9. Prueba que

$$M = \left\{ f \in C[0,1] : \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$

es un subespacio cerrado propio de $C[0,1]$ y calcula la norma de $f + M$ en X/M en los siguientes casos:

$$a)\ f(t) = \operatorname{sen}(\pi t), \quad b)\ f(t) = \cos(\pi t), \quad c)\ f(t) = t - 1$$

Dada $f \in C[01]$, prueba que hay una función $g \in M$ tal que $\|f - g\| = \operatorname{dist}(f, M)$.

10. Sea

$$A = \{x \in c_0 : x(2n) = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}\}, \qquad B = \{x \in c_0 : x(2n-1) = nx(2n) \ \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Prueba que A y B son subespacios cerrados de c_0, que $A + B \neq c_0$ y que $A + B$ es denso en c_0.

Sugerencia. Usa funcionales lineales continuos para probar que A y B son cerrados. Para probar la densidad de $A + B$ recuerda que c_{00} es denso en c_0.

11. Sea M un subespacio de dimensión finita de un espacio normado X, y sea N un subespacio cerrado tal que $X = M \oplus N$. Dado $\varphi_0 \in M^\sharp$, definimos

$$\varphi : M \oplus N \to \mathbb{K}, \quad \varphi(x + y) = \varphi_0(x) \quad (x \in M, y \in N).$$

Prueba que $\varphi \in X^*$.

12. Sean M y N subespacios de un espacio normado X. Supongamos que N es finito dimensional y que existe $\alpha \in]0, 1/2[$ tal que para todo $x \in S_M$ se verifica que $\operatorname{dist}(x, N) \leqslant \alpha$. Prueba que M es finito dimensional.

Sugerencia. Si M fuera infinito dimensional, existiría una sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \in S_M$ y $\|x_n - x_m\| \geqslant 1$ siempre que $n \neq m$. Para cada x_n hay un $y_n \in N$ tal que $\|x_n - y_n\| = \operatorname{dist}(x_n, N)$.